

Виртуальная лабораторная работа №6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ МОЛЯРНЫХ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ C_p/C_v ДЛЯ ВОЗДУХА (компьютерное моделирование)

В.В.Монахов, А.В.Кожедуб, А.В.Смирнов

Цель работы - экспериментальное определение показателя адиабаты $\gamma = C_p / C_v$ для воздуха.

На рис.1 показан экран программы, предназначенной для проведения лабораторной работы на основе компьютерной модели. В большом сосуде с помощью насоса создают избыточное давление воздуха, после чего на короткое время открывают клапан, соединяющий сосуд с атмосферой - процесс установления равновесия считается адиабатным. По величине давления, установившегося после закрытия клапана и наступления термодинамического равновесия, находят показатель адиабаты.

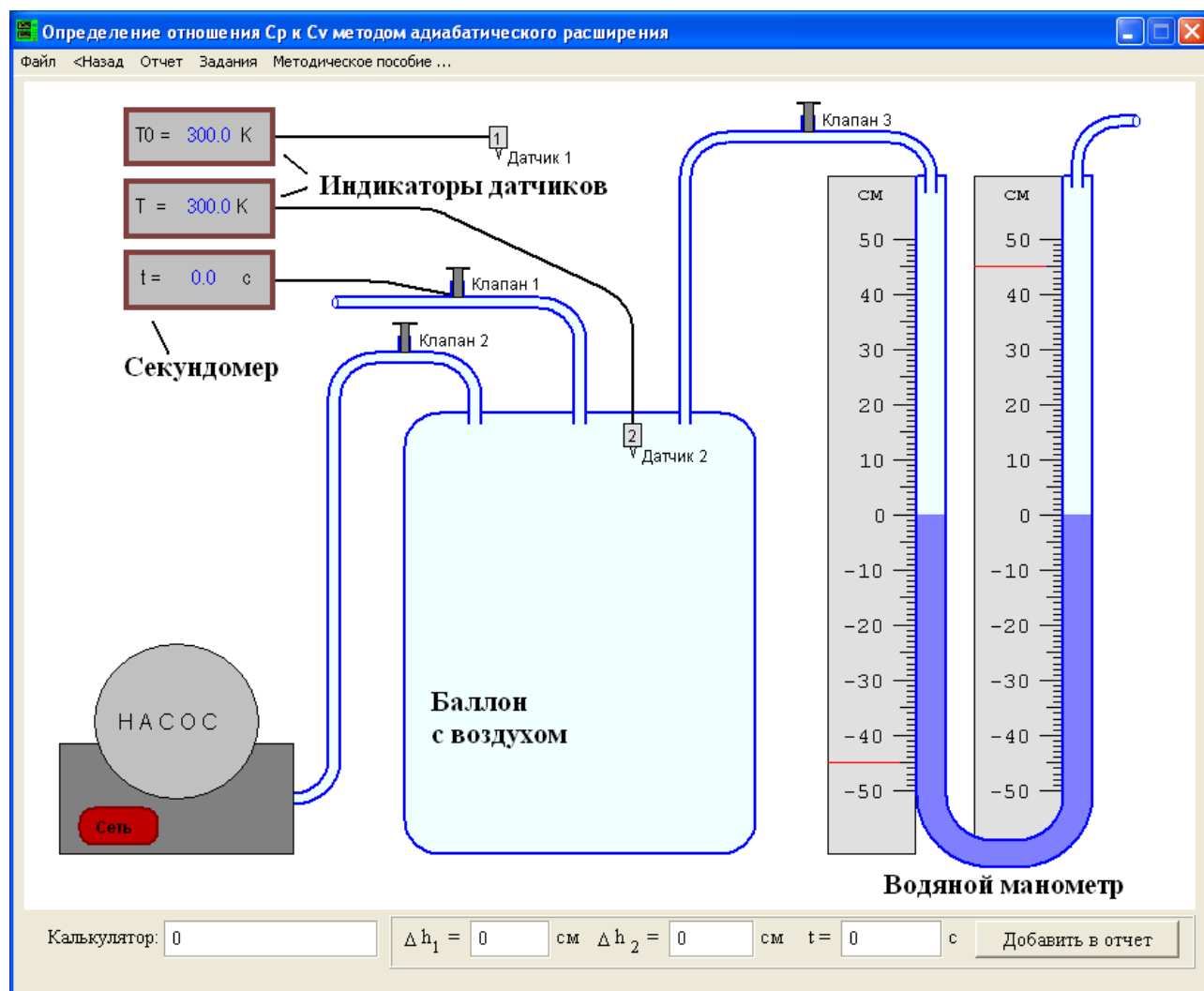


Рис. 1 Главное окно программы и схема экспериментальной установки

1. Теоретические основы работы

Адиабатным (адиабатическим) называют термодинамический процесс, происходящий в термодинамической системе без подвода теплоты. Получим уравнение адиабатного процесса для идеального газа в координатах давление-объем.

Первое начало термодинамики для произвольного термодинамического процесса имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A \quad (1)$$

Здесь δQ - бесконечно малое количество теплоты, подводимое к термодинамической системе; dU - бесконечно малое изменение внутренней энергии системы; δA - бесконечно малая работа, совершаемая термодинамической системой в результате данного процесса. Для адиабатного процесса соотношение (1) имеет вид

$$dU + \delta A = 0 \quad (2)$$

Для идеального газа имеем:

$$dU = \nu C_v dT \quad (3)$$

$$\delta A = p dV \quad (4)$$

Здесь ν - количество вещества; C_v - молярная теплоемкость при постоянном объеме; p - давление; dT и dV - бесконечно малые изменения температуры и объема, соответственно. Подставляя (3), (4) в (2), получим

$$\nu C_v dT + p dV = 0 \quad (5)$$

Идеальный газ подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT.$$

Дифференцируя его, найдем связь между дифференциалами dP , dV и dT :

$$p dV + V dp = \nu R dT. \quad (6)$$

Из (6) получим

$$dT = \frac{p dV + V dp}{\nu R} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), получим дифференциальное уравнение, связывающее объем и давление идеального газа в адиабатном процессе:

$$(C_v + R) p dV + C_v V dp = 0. \quad (8)$$

Учитывая, что $C_v + R = C_p$ - молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении, из (8) получим

$$\frac{C_p}{C_v} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (9)$$

Известно, что для идеального газа молярные теплоемкости C_p и C_v зависят только от числа i степеней свободы молекулы:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R; \quad C_v = \frac{i}{2} R$$

Следовательно, показатель $\gamma = C_p / C_v$ - величина, постоянная для данного газа. В этом случае решение дифференциального уравнения (9) имеет вид

$$pV^\gamma = const \quad (11)$$

Уравнение (11) называют уравнением адиабаты (уравнением Пуассона), а показатель γ - показателем адиабаты (показателем Пуассона). Если считать воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре идеальным газом, состоящим, в основном, из жестких двухатомных молекул ($i = 5$), то теоретическое значение показателя адиабаты для воздуха

$$\gamma = \frac{i + 2}{i} = 1,4. \quad (12)$$

2. Описание экспериментальной установки

Основными частями экспериментальной установки (рис.1) являются:

- баллон, наполненный воздухом;
- водяной манометр;
- подсоединённый к баллону насос;
- два датчика температуры с индикаторами;
- секундомер;
- три клапана.

Клапан1 соединяет баллон с атмосферой. Поперечное сечение *Клапана1* велико. При его открывании процесс установления атмосферного давления в баллоне происходит достаточно быстро. Это быстрое изменение давления происходит практически без теплообмена с окружающей средой, и процесс, происходящий с воздухом в баллоне при открывании *Клапана1* можно считать адиабатным. С помощью *Клапана2* баллон может быть соединен с компрессором, накачивающим воздух в баллон. *Клапан1* в данной работе не используется.

3. Вывод расчётных формул

Пусть с помощью компрессора накачали воздух, затем закрыли *Клапан1*. Воздух в баллоне немного нагреется при сжатии, но через несколько минут температура воздуха в баллоне станет равной температуре T_0 воздуха в лаборатории. Давление p_1 воздуха в баллоне при этом будет равно

$$p_1 = p_0 + p', \quad (13)$$

где p_0 – атмосферное давление; p' - избыточное давление воздуха, которое можно определить по показаниям манометра.

Рассмотрим некоторое количество воздуха в баллоне вдали от клапана, занимающее объем V_1 . Если открыть на короткое время *Клапан1*, то часть воздуха выйдет из баллона, давление станет равным атмосферному, а рассмотренное количество газа увеличит свой объем от V_1 до V_2 (процесс $1 \rightarrow a$ на рис. 2). Температура в баллоне понизится, так как при вытекании из баллона воздух совершает положительную работу против окружающей атмосферы за счет уменьшения своей внутренней энергии.

Считая процесс $1 \rightarrow a$ адиабатным, из (1) получим

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma. \quad (14)$$

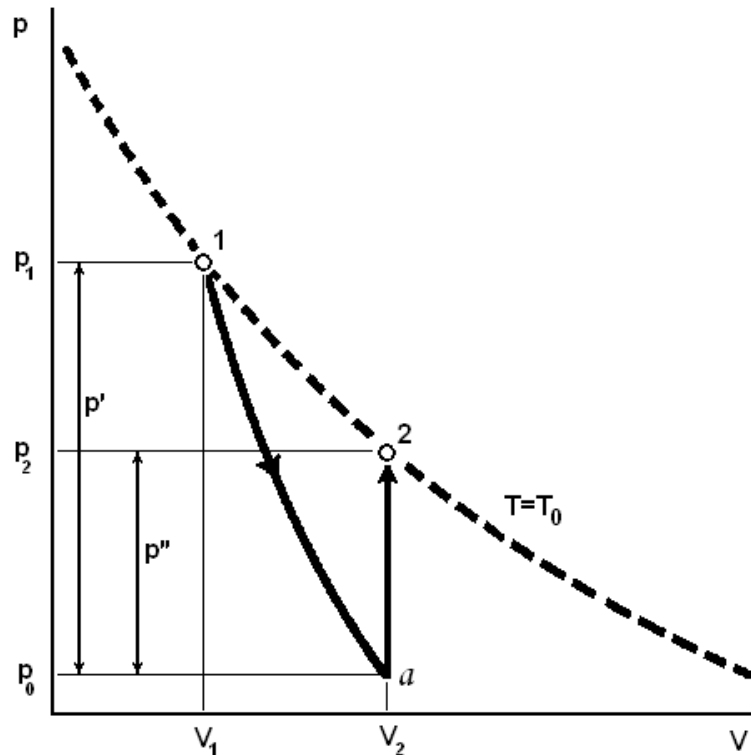


Рис. 2. Графическое изображение основных процессов в координатах давление-объем

После закрывания Клапана 1 происходит изохорное нагревание содержимого баллона до температуры T_0 окружающей среды (процесс $a \rightarrow 2$). При этом давление увеличивается на величину p'' по сравнению с атмосферным, и становится равным

$$p_2 = p_0 + p'' \quad (15)$$

В состояниях 1 и 2 температура газа одинакова, поэтому для них применим закон Бойля-Мариотта:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (16)$$

Исключив из системы уравнений (14), (16) отношение объемов V_2/V_1 ,

получим

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^\gamma$$

Прологарифмировав это соотношение, и используя соотношения (13) и (15), найдем выражение для γ :

$$\gamma = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(p_1/p_2)} = \frac{\ln(1 + p'/p_0)}{\ln(1 + (p' - p'')/(p_0 + p''))}$$

Избыточное давление p' и p'' значительно меньше атмосферного, т.е. под логарифмами в уравнении (17) стоят величины, близкие к единице. При $x \ll 1$ имеем $\ln(1 + x) \approx x$. Пренебрегая значением p'' , малым по сравнению с p_0 , заменяем $p_0 + p''$ на p_0 в знаменателе нижней дроби.

В результате получим:

$$\gamma \approx \frac{p'}{p' - p''} \quad (18)$$

В формулу (18) значения избыточного давления можно подставлять в любых одинаковых единицах. В этой работе удобнее всего выражать p' и p'' в сантиметрах водяного столба, тогда

$$\begin{aligned} p' (\text{см вод. ст.}) &= \Delta h_1 = h'_{\text{лев}} (\text{с.м.}) - h'_{\text{пр}} (\text{с.м.}), \\ p'' (\text{см вод. ст.}) &= \Delta h_2 = h''_{\text{лев}} (\text{с.м.}) - h''_{\text{пр}} (\text{с.м.}). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $h'_{\text{лев}}$ и $h'_{\text{пр}}$ - отсчеты уровней в правой и левой трубках манометра при измерении p' . Величины $h''_{\text{лев}}$ и $h''_{\text{пр}}$ определяются аналогично при измерении p'' . Чтобы определить p'' , необходимо закрыть *Клапан 1* точно в момент окончания адиабатического процесса. Трудность состоит в том, что адиабатический процесс занимает малые доли секунды, и момент его окончания неизвестен. Поэтому p'' определяется следующим косвенным методом. При одинаковом начальном давлении p' , но разной длительности t открытия *Клапана 1* измеряют конечное давление $\tilde{p}''(t)$.

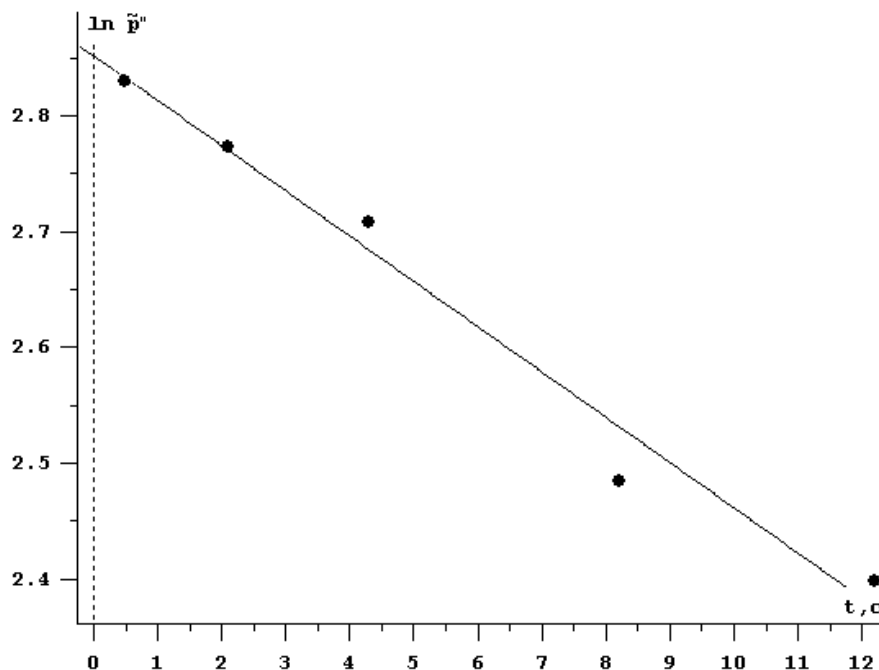


Рис. 3. Зависимость логарифма давления от времени

Закономерности теплообмена между газом и окружающей средой таковы, что зависимость $\tilde{p}''(t)$ можно приближенно описать экспоненциальной функцией вида

$$\tilde{p}''(t) = p'' \exp\left(\frac{t - \tau}{\varepsilon}\right),$$

где τ - длительность адиабатного процесса, ε - постоянный коэффициент, характеризующий скорость теплообмена.

Пренебрегая τ по сравнению с t , и логарифмируя обе части (20), получаем

$$\ln \tilde{p}''(t) = \ln p'' + \frac{t}{\varepsilon}$$

Поскольку $\ln \tilde{p}''(t)$ линейно зависит от времени, и при $t \rightarrow 0$ стремится к $\ln p''$,

то точка пересечения экспериментально найденного линейного графика с вертикальной линией при $t=0$ позволяет найти $\ln p''$ и определить p'' (рис. 3).

4. Порядок выполнения работы

ЧАСТЬ 1. Проведение измерений

1. Часть условий проведения опыта (температура T_0 , давление p_0) заносятся в отчёт автоматически. Приборными погрешностями секундомера (Δt) пренебрегаем, так как процессы достаточно медленные. Приборные погрешности уровней жидкости (Δh) в трубках манометра следует занести в отчёт самостоятельно.

2. Приведите клапаны в начальное состояние:

- Клапан1 (“атмосфера”), соединяющий баллон с атмосферой – закрыт.
- Клапан2 (“к насосу”), соединяющий баллон с компрессором – закрыт.
- Клапан3, соединяющий баллон с манометром – открыт (он в данной работе всегда открыт).

Клапан можно закрыть или открыть, щелкнув по нему ”мышью”.

3. Включите электропитание компрессора, щелкнув ”мышью” по кнопке «сеть» на лицевой панели насоса.

4. Откройте клапан “к насосу”, и наблюдайте за ростом давления в баллоне по водяному манометру. Накачивайте воздух в баллон до такого начального давления, при котором разница уровней в правой и левой трубках манометра $h_{\text{пр}} - h_{\text{лев}} = (60 \pm 80)$ см. **Внимание!** Следите, чтобы нижний уровень жидкости не достиг красной риски – при достижении этого давления автоматически сбрасывается предохранительный клапан.

5. Закройте клапан “к насосу”, затем выключите насос. Учтите, что при выключенном насосе и открытом клапане “к насосу” давление в баллоне медленно падает за счет утечки воздуха через насос.

6. Дождитесь, когда температура в баллоне сравняется с температурой в лаборатории. Давление при этом уменьшится, но оно должно остаться выше желаемого значения p' . Если это не так - подкачайте еще немного воздуха в баллон.

7. Чтобы достаточно точно уменьшить давление до требуемого значения, откройте клапан “к насосу” при выключенном насосе. Давление станет медленно падать из-за утечки воздуха через насос. Внимательно смотрите на манометр, и закройте клапан “к насосу”, как только давление опустится до нужной величины. Занесите показания манометра $p' = \Delta h_1$ в поле ввода Δh_1 под окном с установкой.

8. Откройте клапан “атмосфера”, и закройте его через требуемое время. Рекомендуемые значения t : 2 сек; 4 сек; 6 сек; 8 сек; 10 сек, 12 сек. Прошедшее время отображается на секундомере. Занесите реальное время t , в течение которого был открыт клапан, в соответствующее поле ввода.

9. Дождитесь, когда температура в баллоне сравняется с температурой в лаборатории. Занесите показания манометра $p'' = \Delta h_2$ в поле ввода Δh_2 , и нажмите кнопку "Добавить в отчет".

10. Повторите эксперимент не менее 3 раз при одном и том же уровне начального давления и различных временах t .

После этого откройте форму отчета, выбрав пункт "Отчет" основного меню программы, проведите необходимые расчёты и заполните все пункты отчёта.

ЧАСТЬ 2. Проведение расчетов

1. По полученным данным методом наименьших квадратов автоматически проводится прямая $\ln \tilde{p}''(t) = at + b$ и вычисляются её параметры a и b .
2. По этим параметрам найдите наиболее вероятное значение $\ln p''$ (см. рис. 2.) и вычислите по нему p'' . (Какой параметр, a или b для этого нужен?). В пункте ввода можно непосредственно вводить математическое выражение. Например, $\exp(3.139)$. Программа автоматически вычислит результат.
3. Найдите отношение p'' к p'
4. Вычислите γ по формуле (18): $\gamma \approx p''/(p' - p'')$. Непосредственно в пункте ввода можно пользоваться выражениями типа $60/(60 - 17.46)$

ЧАСТЬ 3. Расчет погрешностей

1. Вычислите погрешность нахождения p' по формуле

$$\Delta p' = \sqrt{2} \Delta h \quad (21)$$

Почему используется такая формула для погрешности?

2. По погрешностям коэффициентов при проведении графика оценить погрешность $\Delta (\ln p'')$ и вычислить погрешность p'' по формуле $\Delta p'' = p'' \Delta (\ln p'')$. (22)

7. Найти относительную и абсолютную погрешности нахождения γ :

$$\delta \gamma = \frac{p''}{p' - p''} \sqrt{\left(\frac{\Delta p'}{p'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p''}{p''}\right)^2}$$
$$\Delta \gamma = \delta \gamma \cdot \gamma$$

3. Выпишите доверительные интервалы для экспериментальных значений p' , p'' и γ .
4. Проверьте, попадает ли теоретическое значение γ для воздуха (12) в найденный доверительный интервал.
5. Сохраните отчет, выбрав пункт "Файл | Сохранить отчет" основного меню.

5. Контрольные вопросы

1. В каких единицах измеряются в системе СИ давление, объем, температура, молярные теплоемкости?
2. Что такое молярные теплоемкости C_p и C_v ?
3. Чем молярная теплоемкость отличается от удельной, удельная - от полной?
4. Что такое адиабатный процесс?
5. Что такое закон Бойля-Мариотта, какой процесс он описывает?
6. Изобразите в координатах $p - V$ изохорное охлаждение, изобарное нагревание, изотермическое и адиабатическое расширение, начинающиеся из одного начального состояния.

7. Как найти бесконечно малое изменение внутренней энергии и бесконечно малую работу, совершаемую идеальным газом в некотором термодинамическом процессе?
8. Как связаны молярные теплоемкости C_p и C_v с числом степеней свободы молекулы i ? Каково теоретическое значение γ ?
9. Как изменяется давление некоторого количества воздуха при адиабатном увеличении его объема в два раза?
10. Какие предположения были сделаны при выводе формулы (18), с какой точностью они выполнены?
11. Каково по порядку величины отношение

$$\frac{p'}{p_0} ?$$
12. Из каких элементов состоит лабораторная установка?
13. Что такое внутренняя энергия идеального газа, как она ведет себя в адиабатическом процессе $1 \rightarrow a$?
14. Из какого графика в данной работе находится избыточное давление p'' , и почему?
15. С какими из величин, p_1 , p_2 , p' или p'' , связаны измеряемые в эксперименте значения Δh_1 и Δh_2 ?
16. Почему при измерениях нельзя выбирать разные значения Δh_1 ? Покажите на рис.2 и рис.3, как изменится при этом ход кривых.
17. Какие процессы происходят с газом в используемой установке при открытом *Клапане1*, если клапан держать открытым 10 секунд?
18. Изобразите в координатах давление-объем все происходящее с некоторым количеством воздуха в баллоне при проведении лабораторной работы.
19. Как теплообмен в процессе реального «адиабатного» расширения влияет на график $1 \rightarrow a$ (см. рис. 2.) и на окончательный результат работы?
20. Какая кинетическая энергия приходится на одну степень свободы молекулы в тепловом равновесии при температуре T ?
21. Докажите, что для одного моля газа $c_p - c_v = R$.
22. Из каких основных компонентов состоит сухой воздух?

Литература

1. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М.: Высш. шк., 1987.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1979.