

## Виртуальная лабораторная работа № 3

### ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА (компьютерное моделирование)

В.В.Монахов, Л.А.Евстигнеев, О.В.Огинец

**Цель работы** - изучить основные закономерности поведения баллистического крутильного маятника при неупругом соударении.

На рис. 1 показан экран программы, предназначенной для проведения лабораторной работы на основе компьютерной модели. Исследуются свободные колебания крутильного маятника, а также его колебания после попадания в мишень “пули”. Проверяется предположение о малости углов отклонения. Находится модуль кручения нити. Проверяются следствия теоремы Гюйгенса – Штейнера. Рассчитывается скорость полёта пули.

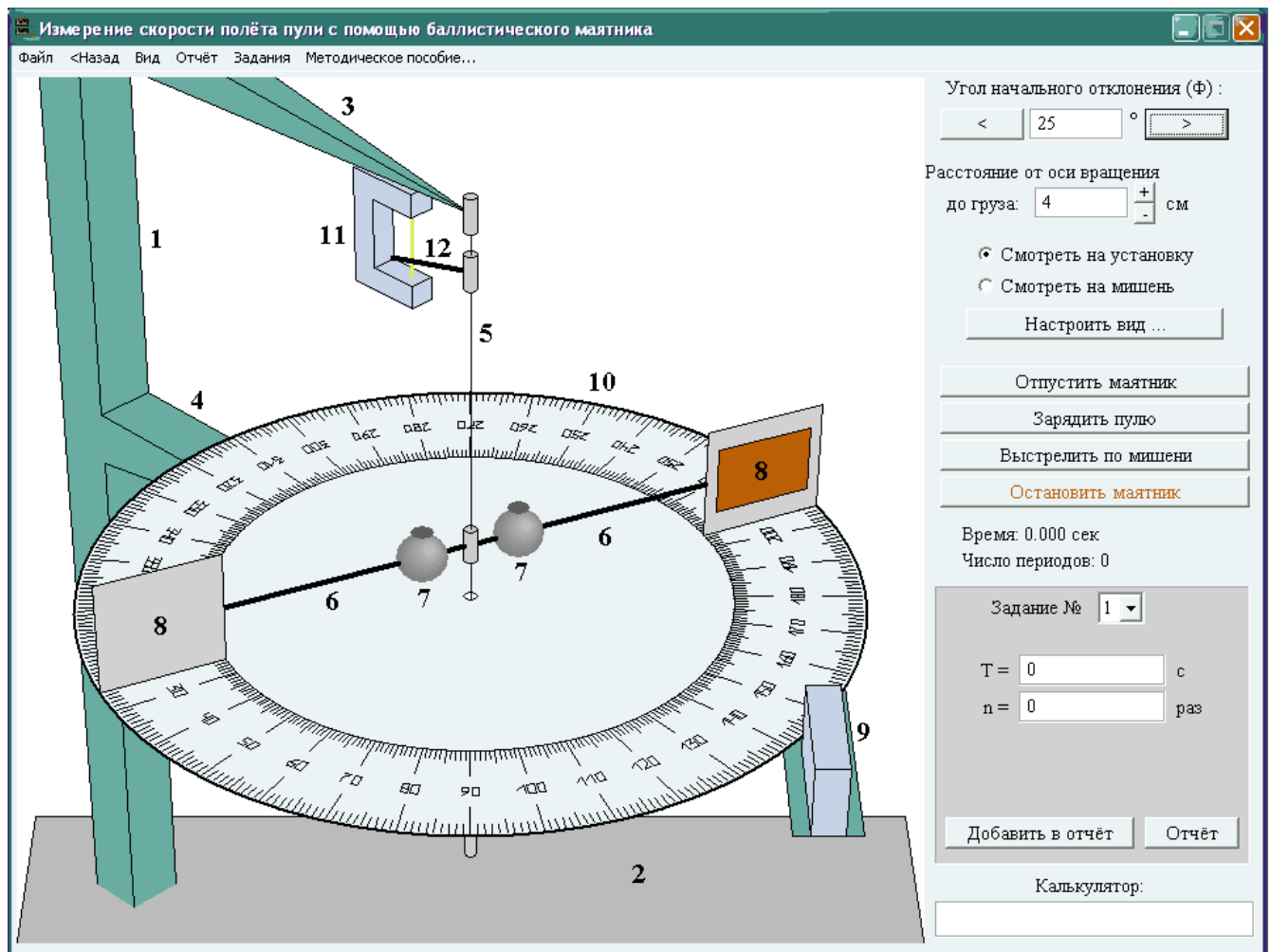


Рис.1. Основное окно программы и схема экспериментальной установки

## 1. Теоретические основы работы

Абсолютно неупругим ударом называется такой удар, когда столкнувшиеся тела после удара либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При этом кинетическая энергия тел частично или полностью превращается во внутреннюю энергию.

Пусть имеется горизонтальный стержень с двумя одинаковыми грузами с массами  $m$ , которые могут перемещаться вдоль стержня (рис.2).

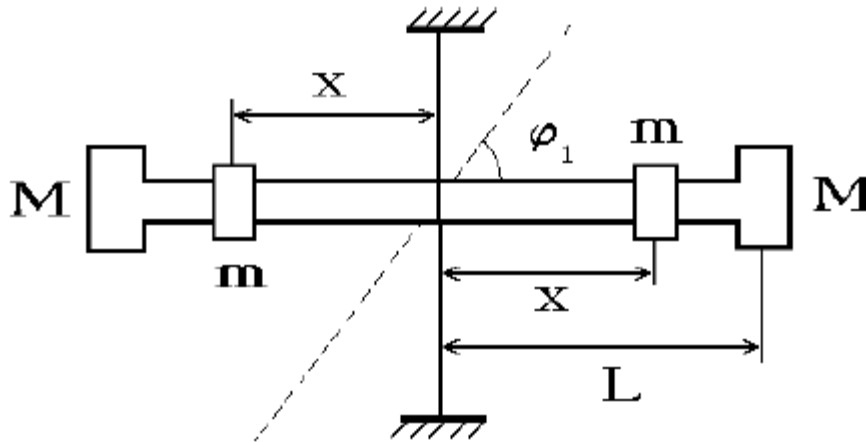


Рис. 2. Схема баллистического крутильного маятника

Стержень подвешен на стальной проволоке, проходящей через его центр и являющейся осью вращения системы. На концах стержня закреплены мишени  $M$ . Пуля, летящая с некоторой скоростью  $v$ , попадает в мишень  $M$  в точке, находящейся от оси вращения на расстоянии  $L$ , и прилипает к мишени. Удар можно считать абсолютно неупругим. Тогда, согласно закону сохранения момента импульса для системы пуля–стержень, можно написать:

$$\mu vL = (J_1 + \mu L^2)\omega_\mu, \quad (1)$$

где  $\mu$  - масса пули,  $\omega_\mu$  - угловая скорость системы после окончания взаимодействия пули с мишенью,  $v$  - скорость пули перед ударом,  $L$  - расстояние от оси вращения до точки удара пули,  $J_1$  - момент инерции маятника с грузами, закрепленными в определенном положении (момент инерции стержня).

При этом моментом инерции пули по отношению к ее вращению вокруг собственной оси пренебрегаем (считаем пулю точечной).

После удара система стержень–пуля совершает крутильные колебания с начальной угловой скоростью  $\omega_\mu$ . Обозначим как  $J$  полный момент инерции маятника. Если пули нет, то  $J = J_1$ ,

иначе, как в данном случае,  $J = J_1 + \mu L^2$ .

Через некоторое время кинетическая энергия системы, равная  $J\omega_\mu^2/2$ , согласно закону сохранения энергии (в пренебрежении неупругими эффектами), полностью перейдет в энергию упругих деформаций нити  $k\phi_\mu^2/2$ :

$$\frac{J\omega_\mu^2}{2} = \frac{k\phi_\mu^2}{2}, \quad (2)$$

где  $\phi_\mu$  - наибольший угол поворота стержня,  $k$  - постоянная упругих сил (модуль кручения). Из уравнения (2) получаем  $J = k\phi_\mu^2/\omega_\mu^2$ , и, подставляя в (1), имеем

$$v = \frac{k\phi_\mu^2}{\omega_\mu \mu L}. \quad (3)$$

Расстояние от оси вращения до точки удара пули  $L$  можно легко измерить, наибольший угол поворота стержня  $\phi_{\mu}$  может быть определен визуально по шкале маятника, а как можно вычислить значения  $k_n$  и  $\mu$ , описано ниже.

В нашем случае система совершает крутильные колебания, которые в отсутствии трения описываются уравнением движения

$$J\ddot{\phi} = -k\phi, \quad (4)$$

где  $\ddot{\phi}$  - угловое ускорение маятника. Период таких колебаний, как следует из (4), равен

$$T = 2\pi \sqrt{J/k}. \quad (5)$$

Меняя положение грузов  $m$  на стержне (а значит и момент инерции системы  $J$ ), мы изменяем период колебаний маятника. При этом грузы надо сдвигать одновременно, чтобы ось симметрии продолжала проходить по нити подвеса.

На основании теоремы Гюйгенса - Штейнера момент инерции системы  $J_1$  при первом положении грузов можно представить в виде:

$$J_1 = J_0 + 2(J_{\omega} + mX_1^2), \quad (6)$$

а при втором положении:

$$J_2 = J_0 + 2(J_{\omega} + mX_2^2), \quad (7)$$

где  $m$  - масса одного груза,  $J_0$  - момент инерции маятника без грузов относительно оси, проходящей через нить подвеса,  $J_{\omega}$  - момент инерции одного груза относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси вращения,  $X_1$  и  $X_2$  - расстояния от центра массы груза до оси вращения при первом и втором положении грузов, соответственно.

Из (5) получаем для квадратов периодов колебаний при первом и втором положениях грузов:

$$T_1^2 = \frac{(2\pi)^2 J_1}{k}, \quad T_2^2 = \frac{(2\pi)^2 J_2}{k},$$

откуда:

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2 (J_1 - J_2)}{k}. \quad (8)$$

С другой стороны, из (6) и (7) имеем:

$$J_1 - J_2 = 2m (X_1^2 - X_2^2), \quad (9)$$

поэтому

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{(2\pi)^2 2m(X_1^2 - X_2^2)}{k},$$

т. е.

$$k = \frac{(2\pi)^2 2m(X_1^2 - X_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (10)$$

Таким образом, зная массу грузов  $m$  и измерив значения периодов  $T_1$  и  $T_2$  при положении грузов  $X_1$  и  $X_2$ , можно найти модуль кручения нити  $k$ . Зная  $k$ , легко найти массу и скорость пули. Действительно, из (5) имеем:

$$T_{\mu} = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 + \mu L^2}{k}} = \frac{2\pi}{\omega_{\mu}},$$

(11)

где  $T_1$  - период колебания маятника с прилипшей пулей.

Тогда, выражая в (11)  $\mu$  через остальные величины, получаем:

$$\mu = \frac{k}{4\pi^2 L^2} (T_\mu^2 - T_1^2),$$

(12)

где  $T_1$  - период колебаний маятника с тем же положением грузов, но без пули. При этом измерение периода колебания маятника  $T_\mu$  можно провести, прилепив вручную пулю к мишени, и производить выстрел не обязательно.

Теперь, подставляя выражения для  $\mu$  в (3), мы можем вычислить скорость пули:

$$v = \frac{2\pi \phi_\mu^2 T_\mu L}{T_\mu^2 - T_1^2}.$$

(13)

Таким образом, для вычисления скорости полета пули нам нужно измерить  $L$  (расстояние от нити до точки прилипания пули), максимальный угол отклонения после выстрела, периоды колебаний маятника  $T_\mu$  и  $T_1$  (с прилипшей пулей и без нее).

## 2. Описание экспериментальной установки

Баллистический маятник изображен на рис.1. На вертикальной стойке 1 основания 2 крепятся кронштейны 3 и 4. Между ними на стальной проволоке 5 закреплен подвес 6, представляющий собой стальной стержень, по которому в горизонтальном направлении перемещаются два груза 7 равной массы. На концах стержня находятся мишени 8. На кронштейне 4 крепится пружинное пусковое устройство 9, предназначенное для запуска "пули". Поверх кронштейна 4 располагается стол, на котором нанесена шкала 10 для определения угла отклонения маятника (в градусах). Снизу верхнего кронштейна 3 располагается фотоэлектрический датчик 11, служащий для измерения периодов колебаний маятника. Во время колебаний из-за вращения проволоки штырь 12 пересекает луч фотоэлектрического датчика, и происходит выдача сигнала на компьютер. Время между двумя такими пересечениями считается периодом колебаний маятника.

## 3. Порядок выполнения работы

### Задание 1. Измерение периодов колебаний маятника

1. Отклоните маятник на заданный угол (пункт ввода "Угол начального отклонения") и нажмите кнопку "Отпустить маятник. После совершения маятником выбранного вами числа колебаний  $n$  нажмите кнопку "Отпустить маятник" и занесите результаты в отчёт (кнопка "Добавить в отчёт").

2. Проведите серию измерений для различных значений  $n$ . В отчёте автоматически будет построен график зависимости периода  $T$  от  $n$ .

3. Сделайте вывод о том, с какой точностью измеряется период колебаний, и о зависимости или независимости периода колебаний от числа колебаний маятника.

### Задание 2. Измерение зависимости периодов колебаний от начальных углов отклонения

1. Переключите программу с помощью выпадающего списка на задание 2.

2. Измерьте зависимость периода колебаний  $T$  от начального угла отклонения маятника  $\phi_0$ , добавляя в отчёт результаты измерений аналогично тому, как это делалось в задании 1. Целесообразно проводить измерения для большого числа периодов для того, чтобы добиться лучшей точности.

3. На основании результатов измерений сделайте вывод о справедливости или не справедливости уравнения (4) для таких углов отклонения  $\phi$ , у которых нельзя считать

$\sin \phi \approx \phi$ . Сделайте вывод о том, можно ли для рассматриваемой системы считать угол  $\phi = \frac{\pi}{2}$  малым.

### **Задание 3. Измерение зависимости периодов колебаний от положения грузов**

1. Переключите программу с помощью выпадающего списка на задание 3.
2. Измерьте зависимость  $T(x)$  для различных расстояний грузов  $x$  от оси маятника.
3. Рассчитайте значение модуля кручения  $k$  по формуле (10) для нескольких выбранных значений  $T_1$  и  $T_2$ .
4. Оцените погрешность определения  $k$ .

### **Задание 4. Определение массы пули**

1. Переключите программу с помощью выпадающего списка на задание 4.
2. Постройте график  $J(x)$  величины момента инерции маятника для различных положений  $x$  груза. Он рассчитывается по полученной зависимости  $T(x)$ . Проверьте качественное соответствие результатов теореме Гюйгенса – Штейнера.
3. Определите массу пули по формуле (12).
4. Оцените погрешность определения массы.

### **Задание 5. Измерение скорости полёта пули**

1. Переключите программу с помощью выпадающего списка на задание 5.
2. Установите груз в фиксированное положение  $x$ , отклоните маятник и измерьте период  $T_1$  его колебаний.
3. Пружинное ружьё зарядите пулей, маятник приведите в состояние покоя и произведите выстрел.
4. По шкале определите максимальный угол отклонения после прилипания пули.
5. Измерьте период  $T_{\mu}$  колебаний маятника с прилипшей пулей.
6. Измерьте расстояние от центра оси вращения до точки прилипания пули.
7. Используя эти результаты, рассчитайте скорость пули.
8. Проведите серию таких измерений для различных положений грузов и усредните полученные результаты.

## **4. Контрольные вопросы**

1. Какой удар называется абсолютно неупругим? Сохраняется ли механическая энергия при таком столкновении?
2. Напишите закон сохранения момента импульса для системы маятник-пуля.
3. Какие колебания возбуждаются в баллистическом маятнике в результате столкновения с пулей? Опишите их начальные условия. Зависит ли период колебаний баллистического маятника от амплитуды колебаний? Для чего нужно определить угол максимального отклонения маятника?
4. Изобразите график зависимости  $T(x)$ , где  $T$  - период колебаний маятника,  $x$  – расстояние грузов на стержне от оси вращения до их центра. Как выглядит этот график для достаточно больших значений  $x$ .
5. Что нужно знать для определения массы пули? ее скорости в момент столкновения?
6. Вычислите объем пули и определите материал, из которого она изготовлена.
7. Что представляет собой баллистический маятник, используемый в данной работе. Как реализовано измерение периода колебаний баллистического маятника?