

## Виртуальная лабораторная работа №2

### ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА (компьютерное моделирование)

В.В.Монахов, Л.А.Евстигнеев

**Цель работы** - изучение закономерностей движения физического маятника на примере обратного маятника.

На рис.1 показан экран программы, предназначенной для проведения лабораторной работы на основе компьютерной модели. В качестве физического маятника используется металлический стержень, на котором закреплены два диска (синий и красный), и две треугольные призмы. Колебания совершаются при опоре на эти призмы. Момент инерции маятника можно изменять передвигением красного диска. Маятник можно переворачивать. Строятся зависимости периодов колебаний от позиции диска в прямом и обратном положениях маятника. Ускорение свободного падения находится по периоду колебаний в точке пересечения зависимостей.

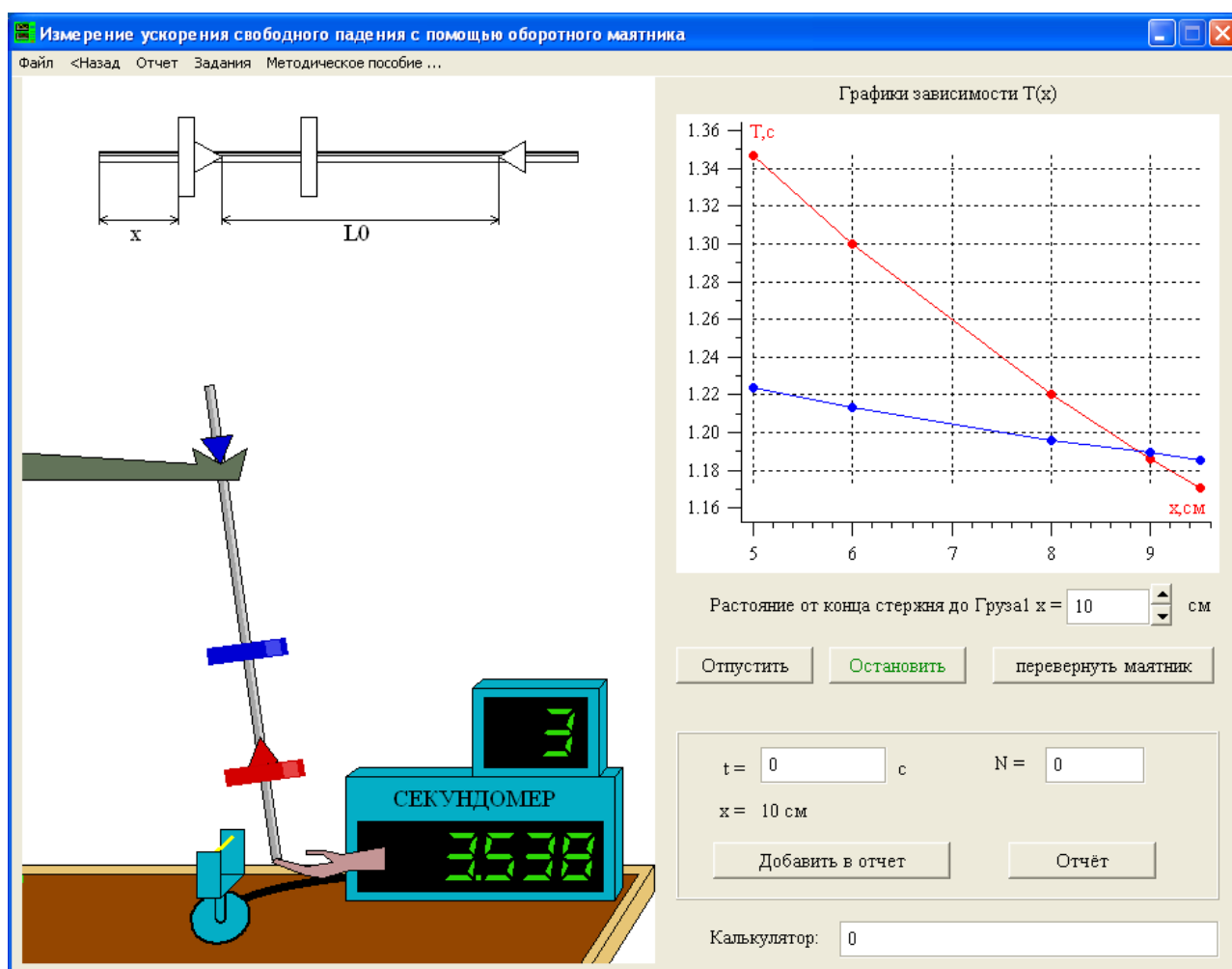


Рис.1. Основное окно программы

#### 1. Теоретические основы работы: физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, имеющее возможность совершать колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси.

Можно показать, что период малых свободных колебаний физического маятника

определяется соотношением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (1)$$

где  $g$  - ускорение свободного падения,  $m$  - масса маятника,  $I$  - момент инерции маятника относительно оси подвеса,  $l$  - расстояние от оси подвеса до центра инерции маятника.

В частности, для математического маятника, масса которого сосредоточена в центре инерции, имеем  $I_m = ml^2$ . Тогда из равенства (1) получаем

$$T_m = 2\pi \sqrt{l/g} \quad (2)$$

Соотношение (1) удобно преобразовать, используя теорему Штейнера:

$$I = I_0 + ml^2, \quad (3)$$

где  $I_0$  - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр инерции параллельно оси качания. Подставив равенство (3) в (1), находим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mgl}} \quad (4)$$

Представляет интерес анализ зависимости периода  $T$  колебаний физического маятника от величины  $l$ . В предельном случае больших значений  $l$ , когда  $ml^2 \gg I_0$ , соотношение (4) переходит в (2), то есть, получаем математический маятник:

$$T(l)|_{l \rightarrow \infty} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

При малых  $l$  маятник близок к положению безразличного равновесия. В этом случае из соотношения (4) получаем

$$T(l)|_{l \rightarrow 0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgl}} \quad (6)$$

Примерный вид графика зависимости  $T(l)$  представлен на рис.2. Асимптотическое поведение функции при  $l \rightarrow \infty$  и  $l \rightarrow 0$  описывается выражениями (5) и (6). Можно показать, что при  $l_{min} = (I_0/m)^{1/2}$  функция  $T(l)$  имеет минимум.

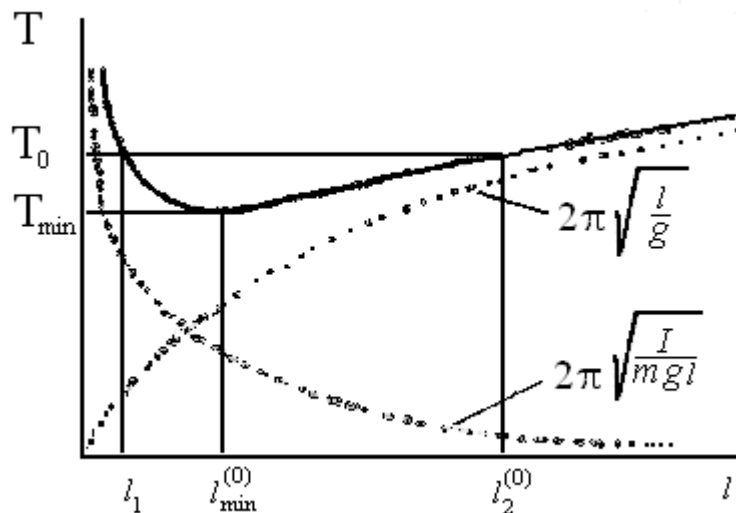


Рис. 2. Примерный вид графика зависимости  $T(l)$

Рассмотрим возможность определения с помощью физического маятника ускорения свободного падения  $g$ . Входящую в формулу (4) величину  $I_0$ , которую трудно найти из опыта, можно исключить, измеряя период колебаний при двух разных значениях  $l$ . Записав равенство (4) для  $l_1$  и  $l_2$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} mgl_1 T_1^2 &= 4\pi^2 (I_0 + ml_1^2), \\ mgl_2 T_2^2 &= 4\pi^2 (I_0 + ml_2^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда находим

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2}. \quad (8)$$

На практике трудно точно определить положение центра инерции маятника, то есть измерить  $l_1$  и  $l_2$ . Эту трудность можно обойти, если взять такие расстояния  $l_1^{(0)}$  и  $l_2^{(0)}$ , чтобы соответствующие периоды были равны, то есть выполнялось условие  $T_1^{(0)}=T_2^{(0)}=T_0$ . Тогда, полагая  $l_1^{(0)} \neq l_2^{(0)}$ , из равенства (8) получаем

$$g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} [l_1^{(0)} + l_2^{(0)}]. \quad (9)$$

При этом, если оси расположены по разные стороны центра инерции, то сумма  $[l_1^{(0)} + l_2^{(0)}]$  равна расстоянию  $L_0$  между осями, которое легко измерить с высокой точностью.

Итак, если наблюдается равенство периодов колебаний физического маятника относительно двух осей, находящихся по обе стороны центра инерции и на разном расстоянии от него, то величину  $g$  можно найти из соотношения

$$g = 4\pi^2 \frac{L_0}{T_0^2}. \quad (10)$$

где  $L_0$  - расстояние между осями;  $T_0$  - общий период колебаний.

## 2. Теоретические основы работы: оборотный маятник

В работе используется физический маятник, называемый оборотным. Схематически он изображен на рис. 3. Основной частью маятника является металлический стержень 1. Осями подвеса служат ребра двух призм 2, закрепленных вблизи концов стержня. В рабочем положении призмы устанавливаются в V-образные опоры 3. Смещение центра инерции, необходимое для изменения расстояния  $l_1$  и  $l_2$ , обеспечивается перемещением массивного груза 4, находящегося у конца стержня. Положение фиксированного груза 5 подобрано так, чтобы с помощью регулировочного груза можно было добиться равенства  $T_1$  и  $T_2$  в прямом и обратном положениях маятника (рис. 3).

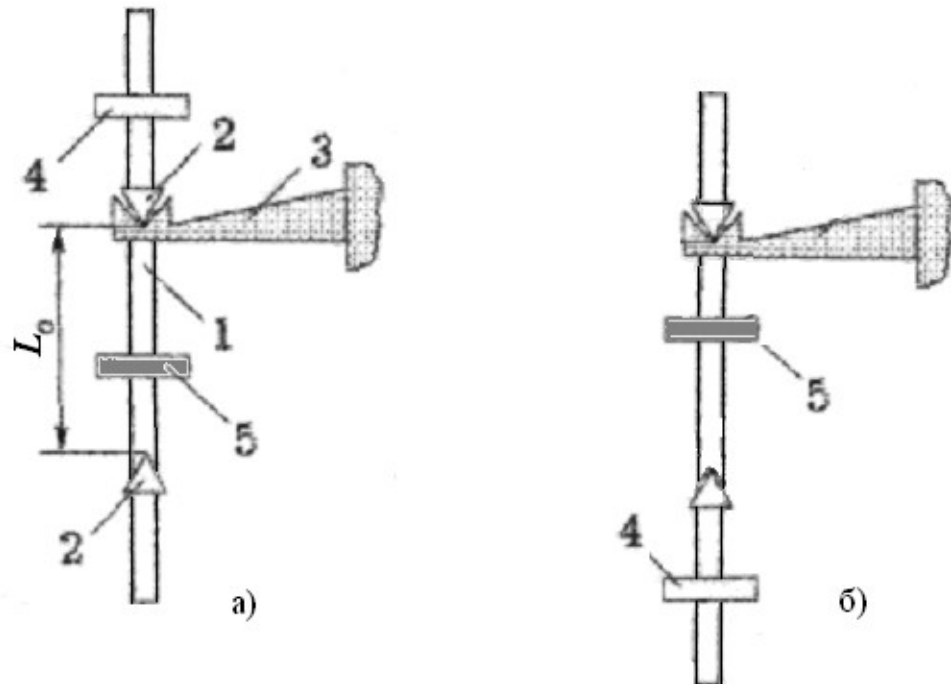


Рис. 3. Оборотный маятник, а) - прямое, б) - обратное положение

Для более точного измерения величины  $T_0 = T_1^{(0)} = T_2^{(0)}$  в работе исследуется зависимость

$T_1$  и  $T_2$  от положения  $x$  регулировочного груза, которое определяется по специальной шкале. Поскольку расстояние  $l_0$  между осями фиксировано, то при смещении груза изменение  $l_1$  и  $l_2$  будет одинаково по величине, но противоположно по знаку. Как видно из рис. 2, это приведет к одинаковому по знаку изменению периодов  $T_1$  и  $T_2$ .

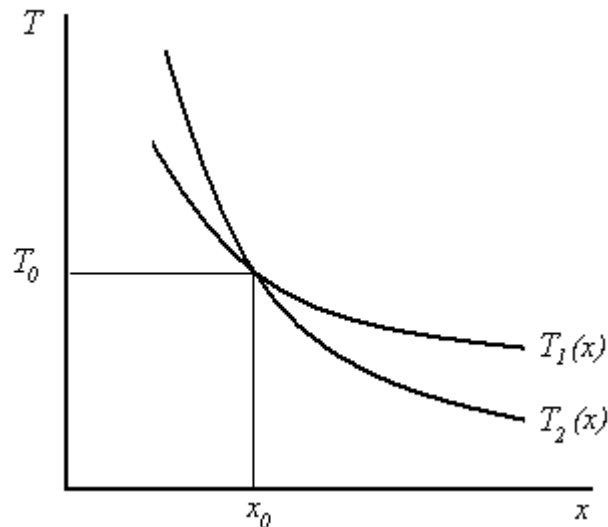


Рис. 4. Зависимости  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$

Однако при достаточной асимметрии в расположении центра инерции зависимость  $T_2(x)$  в обратном положении маятника будет более крутой, чем  $T_1(x)$  в прямом.

Таким образом, графики зависимостей  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  для прямого и обратного положений маятника будут иметь вид, изображенный на рис. 4. В результате значение  $T_0$  можно найти как ординату точки пересечения соответствующих кривых  $T_0 = T_1^{(0)} = T_2^{(0)}$ .

Вследствие погрешностей измерений, экспериментальные точки на графике  $T(x)$  могут не находиться на плавной кривой, предсказываемой теорией. Поэтому при обработке результатов измерений кривые  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  программа проводит приближенно, с минимизацией средних отклонений от полученных из опыта точек.

### 3. Порядок выполнения работы

1. Параметры маятника задаёт преподаватель.
2. Проведите измерение периода для  $N = 10-30$  полных колебаний маятника.

**Внимание!** Амплитуда колебаний должна составлять около  $10-20^\circ$ . При слишком больших отклонениях колебания становятся нелинейными, и период начинает зависеть от числа проведённых колебаний. При слишком маленькой амплитуде на измерение периода начинает сильно влиять сила сухого трения, даже если трение не очень велико.

Добавьте в отчёт измеренные значения периода  $T$ , числа колебаний  $N$  и положения  $x$  груза (кнопка “Добавить в отчёт”).

3. Переверните маятник и повторите задание 2.
4. Повторите опыт при 5-7 различных значениях  $x$ , перемещая груз из одного крайнего положения в другое (от минимально возможного  $x$  до максимально возможного). График зависимостей  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  строится автоматически.
5. Для повышения точности измерения  $T_0$  проведите особенно тщательные измерения в области пересечения кривых.

6. Расстояние  $L_0$  между ребрами призмы, служащими осями подвеса маятника, задаётся преподавателем и вносится в отчёт автоматически. Оцените погрешность  $\Delta L_0$  измерения  $L_0$  с помощью линейки и занесите её в отчёт.

7. Найдите величину  $T_0$  как ординату точки пересечения кривых  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  для прямого и обратного положений маятника. По формуле (10) рассчитайте величину  $g$  и занесите её в отчёт.

8. Оцените ошибку определения  $T_0$ , рассчитайте погрешность нахождения  $g$  и занесите её в отчёт.

#### 4. Расчет погрешностей

Используя правила вычисления погрешности косвенных измерений, из выражения (10) получаем следующую формулу для относительной погрешности величины  $g$ :

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L_0}{L_0}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2}, \quad (13)$$

где  $\Delta L_0$  и  $\Delta T_0$  - абсолютные погрешности величин  $L_0$  и  $T_0$ .

Поскольку расстояние  $L_0$  в модельном варианте работы не измеряется, то предлагается положить эту погрешность равной оценочной погрешности измерения с помощью обычной линейки.

Величина  $T_0$  определяется косвенным методом по графикам зависимостей  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$ . При этом вследствие наличия погрешности  $\Delta t$  измерения времени  $t$ , график  $T(x)$  фактически должен изображаться не линией, а полосой шириной около  $2\Delta t$  (при использовании одинакового числа колебаний  $N$  для измерения  $T$ ).

Погрешность  $\Delta T$  следует найти по данным многократных измерений периода при одном и том же  $x$ .